BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2008***

О ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ ЧИСЛА ШАГОВ ДЛЯ ДОСТИЖЕНИЯ ЗАДЕРЖИВАЮЩЕГО ЭКРАНА ПОЛУМАРКОВСКОМ БЛУЖДАНИИ

Б.Г.ШАМИЛОВА

Бакинский Государственный Университет

В данной работе исследуется ступенчатый процесс полумарковского блуждания с задерживающим экраном. Получено интегральное уравнение для условной производящей функции числа шагов полумарковского блуждания. Из этого уравнения в случае сложного распределения Лапласа находится явный вид условной и безусловной производящей функции числа шагов, при котором процесс впервые достигает экрана. Кроме того, найдены явные формулы для математического ожидания и дисперсии числа шагов.

Постановка задачи. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P}(\cdot))$ задана последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_i(\omega), \eta_i(\omega)\}, i=\overline{1,\infty}$, где $\xi_i(\omega)>0$ и заданы числа $z>0$, $b>0$, $z \geq b$.

По этим случайным величинам построим процесс

$$X_1(t,\omega)=z+\sum_{i=1}^{k-1}\eta_i(\omega), \quad \text{если} \ \sum_{i=1}^{k-1}\xi_i(\omega)\leq t<\sum_{i=1}^{k}\xi_i(\omega), \qquad \sum_1^0=0,$$

который будем называть ступенчатым процессом полумарковского блуждания.

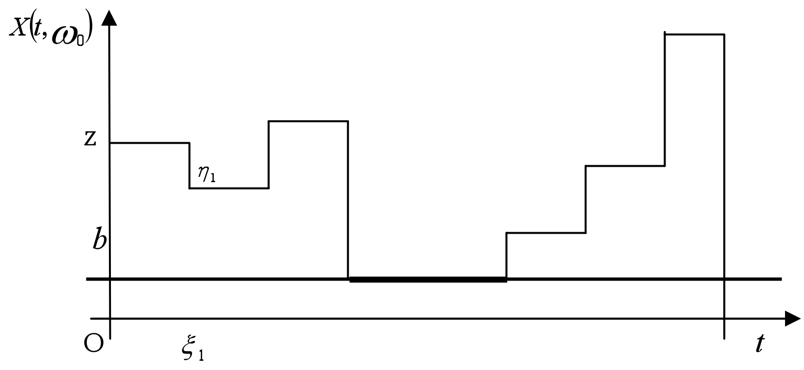
Процесс, построенный следующим образом, называется процессом полумарковского блуждания с задерживающим экраном в « b »:

$$X(t,\omega)=\zeta_k(\omega), \ \text{если} \ \sum_{i=1}^{k}\xi_i(\omega)\leq t<\sum_{i=1}^{k+1}\xi_i(\omega), \ k\geq 0, \left(\sum_1^0=0\right).$$

$$\zeta_k(\omega)=\max\{b, \zeta_{k-1}(\omega)+\eta_k(\omega)\}, \ k\geq 1,$$

$$\zeta_0(\omega)=z.$$

Одна из реализаций $X(t,\omega)$ следующая:



Исследованию ступенчатых процессов полумарковского блуждания посвящено довольно много работ [2, 3]. В этих работах распределение блуждания имеет произвольное распределение. В такой общей постановке полученные результаты громоздкие и они не пригодятся для приложений.

Через ν_1^b обозначим число шагов процесса $X(t,\omega)$, при котором он первый раз достигает экрана «b», т.е.

$$\nu_1^b = \min\left\{k : z + \sum_{i=1}^{k} \eta_i \le b\right\}.$$

Цель в этой статье - найти производящую функцию распределения случайной величины ν_1^b и её числовые характеристики.

Формулировка и доказательство основных результатов. Введем следующие обозначения:

$$\psi(u/z) = \sum_{k=1}^{\infty} u^k \, \mathrm{P}\{\nu_1^b = k / X(0,\omega) = z\}, \quad 0 < u \le 1,$$

$$\psi(u) = \int_{z=b}^{\infty} \psi(u/z) d\mathrm{P}\{X(0,\omega) < z\},$$

где $\psi(u/z)$ - условная производящая функция, а $\psi(u)$ - безусловная производящая функция.

Теорема. Для условной производящей функции $\psi(u/z)$ имеет место

$$\psi(u/z) = u\mathrm{P}\{\eta_1 < b - z\} + u \int_{y=b}^{\infty} \psi(u/y)\, d\mathrm{P}\{\eta_1 < y - z\}. \tag{1}$$

Доказательство. Не трудно понять, что

$$\mathrm{P}\{\nu_1^b = 1 / X(0,\omega) = z\} = \mathrm{P}\{z + \eta_1 < b\} = \mathrm{P}\{\eta_1 < b - z\}. \tag{2}$$

При $k \ge 2$ имеем:

$$\mathrm{P}\left\{\nu_1^b = k / X(0,\omega) = z\right\} =$$

$$= \int\limits_{y=b}^{\infty} \mathrm{P}\{z + \eta_1 > b, z + \eta_1 \in dy\} \mathrm{P}\left\{\nu_1^b = k - 1 / X(0,\omega) = y\right\}. \qquad (3)$$

Если обе части уравнения (3) умножить на u^k и суммировать по $k = \overline{2,\infty}$, то получим:

$$\sum_{k=2}^{\infty} u^k \mathrm{P}\left\{\nu_1^b = k / X(0,\omega) = z\right\} =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} u^k \int\limits_{y=b}^{\infty} \mathrm{P}\{z + \eta_1 > b, z + \eta_1 \in dy\} \mathrm{P}\left\{\nu_1^b = k - 1 / X(0,\omega) = y\right\}.$$

Добавляя к обеим частям последнего равенства

$$u \cdot \mathrm{P}\left\{\nu_1^b = 1 / X(0) = z\right\}$$

имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u^k \mathrm{P}\left\{\nu_1^b = k / X(0,\omega) = z\right\} = u \cdot \mathrm{P}\left\{\nu_1^b = 1 / X(0,\omega) = z\right\} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} u^k \int\limits_{y=b}^{\infty} \mathrm{P}\{z + \eta_1 > b, z + \eta_1 \in dy\} \mathrm{P}\left\{\nu_1^b = k - 1 / X(0,\omega) = y\right\}.$$

Откуда получаем уравнение (1).

Теперь покажем, что уравнение (1) допускает явное решение в классе лапласовых распределений.

Пусть η_1 имеет распределение Лапласа третьего порядка с параметрами λ и μ.

$$\mathrm{P}\{\eta_1 < x\} = \begin{cases} \dfrac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} \ell^{\mu x}, x < 0,\ \mu > 0, \\ 1 - \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\left[\dfrac{2\lambda+\mu}{\lambda+\mu} + \lambda x\right] \ell^{-\lambda x}, x > 0,\ \lambda > 0, \end{cases}$$

$$p_\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^2 \mu}{(\lambda+\mu)^2} \ell^{\mu x}, x < 0, \mu > 0, \\ \dfrac{\lambda^2 \mu}{\lambda+\mu}\left[\dfrac{1}{\lambda+\mu} + x\right] \ell^{-\lambda x}, x > 0, \lambda > 0. \end{cases}$$

Тогда уравнение (1) имеет следующий вид:

$$\psi(u/z) = \frac{\lambda^2 u}{(\lambda+\mu)^2} u\, \ell^{\mu(b-z)} + \frac{\lambda^2 \mu}{(\lambda+\mu)^2} u\, \ell^{-\mu z} \int\limits_{y=b}^{z} \ell^{\mu y} \psi(u/y) dy +$$

$$+ \frac{\lambda^2 \mu}{(\lambda+\mu)^2} u\, \ell^{\lambda z} \int\limits_{y=z}^{\infty} \ell^{-\lambda y} \psi(u/y) dy + \frac{\lambda^2 \mu}{\lambda+\mu} u\, \ell^{\lambda z} \int\limits_{y=z}^{\infty} y\, \ell^{-\lambda y} \psi(u/y) dy -$$

$$- \frac{\lambda^2 \mu}{\lambda+\mu} u z\, \ell^{\lambda z} \int\limits_{y=z}^{\infty} \ell^{-\lambda y} \psi(u/y) dy. \qquad (4)$$

Из этого интегрального уравнения получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\psi'''(u/z)-(2\lambda-\mu)\psi''(u/z)+\lambda(\lambda-2\mu)\psi'(u/z)+\lambda^2\mu(1-u)\psi(u/z)=0,$$

которое имеет решение

$$\psi(u/z)=c_1(u)\,\ell^{k_1(u)z}+c_2(u)\,\ell^{k_2(u)z}+c_3(u)\,\ell^{k_3(u)z}, \tag{5}$$

где $k_i(u)$, $i=1,2,3$ - корни характеристического уравнения

$$k^3(u)-(2\lambda-\mu)k^2(u)+\lambda(\lambda-2\mu)k(u)+\lambda^2\mu(1-u)=0. \tag{6}$$

Из (4) находим следующие начальные условия, при $z=b$:

$$\psi(u/b)=\frac{\lambda^2 u}{(\lambda+\mu)^2}+\frac{\lambda^2\mu}{(\lambda+\mu)^2}ue^{\lambda b}\int_{y=b}^{\infty}e^{-\lambda y}\psi(u/y)dy+$$
$$+\frac{\lambda^2\mu}{\lambda+\mu}ue^{\lambda b}\int_{y=b}^{\infty}ye^{-\lambda y}\psi(u/y)dy-\frac{\lambda^2\mu}{\lambda+\mu}ube^{\lambda b}\int_{y=b}^{\infty}e^{-\lambda y}\psi(u/y)dy,$$

$$\psi'_z(u/b)=-\frac{\lambda^2\mu}{(\lambda+\mu)^2}u-\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}ue^{\lambda b}\int_{y=b}^{\infty}e^{-\lambda y}\psi(u/y)dy+$$
$$+\frac{\lambda^3\mu}{\lambda+\mu}ue^{\lambda b}\int_{y=b}^{\infty}ye^{-\lambda y}\psi(u/y)dy-\frac{\lambda^3\mu}{\lambda+\mu}ube^{\lambda b}\int_{y=b}^{\infty}e^{-\lambda y}\psi(u/y)dy,$$

$$\psi''_{zz}(u/b)=\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}u-\frac{\lambda^3\mu(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)^2}ue^{\lambda b}\int_{y=b}^{\infty}e^{-\lambda y}\psi(u/y)dy+$$
$$+\frac{\lambda^4\mu}{\lambda+\mu}ue^{\lambda b}\int_{y=b}^{\infty}ye^{-\lambda y}\psi(u/y)dy-\frac{\lambda^4\mu}{\lambda+\mu}ube^{\lambda b}\int_{y=b}^{\infty}e^{-\lambda y}\psi(u/y)dy.$$

Подставляя решение (5) в эти равенства, мы получаем следующую систему трех неоднородных линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}\left\{\lambda^2\mu u(\lambda+\mu)^2+\lambda^2\mu u[\lambda-k_2(u)][\lambda-k_3(u)]-(\lambda+\mu)[\lambda-k_2(u)]^2[\lambda-k_3(u)]^2\right\}\ell^{k_1(u)b}c_1(u)+\\ +\left\{\lambda^2\mu u(\lambda+\mu)^2+\lambda^2\mu u[\lambda-k_1(u)][\lambda-k_3(u)]-(\lambda+\mu)[\lambda-k_1(u)]^2[\lambda-k_3(u)]^2\right\}\ell^{k_2(u)b}c_2(u)+\\ +\left\{\lambda^2\mu u(\lambda+\mu)^2+\lambda^2\mu u[\lambda-k_1(u)][\lambda-k_2(u)]-(\lambda+\mu)[\lambda-k_1(u)]^2[\lambda-k_2(u)]^2\right\}\ell^{k_3(u)b}c_3(u)=\\ \qquad =\lambda^4\mu u^2,\\ \left\{\lambda\mu u(\lambda+\mu)^2k_1(u)-\lambda\mu^2u[\lambda-k_2(u)][\lambda-k_3(u)]-(\lambda+\mu)[\lambda-k_2(u)]^2[\lambda-k_3(u)]^2\right\}\ell^{k_1(u)b}c_1(u)+\\ +\left\{\lambda\mu u(\lambda+\mu)^2k_2(u)-\lambda\mu^2u[\lambda-k_1(u)][\lambda-k_3(u)]-(\lambda+\mu)[\lambda-k_1(u)]^2[\lambda-k_3(u)]^2\right\}\ell^{k_2(u)b}c_2(u)+\\ +\left\{\lambda\mu u(\lambda+\mu)^2k_3(u)-\lambda\mu^2u[\lambda-k_1(u)][\lambda-k_2(u)]-(\lambda+\mu)[\lambda-k_1(u)]^2[\lambda-k_2(u)]^2\right\}\ell^{k_3(u)b}c_3(u)=\\ \qquad =-\lambda^3\mu^2u^2,\\ \left\{\mu u(\lambda+\mu)^2k_1^2(u)-\lambda\mu u(\lambda+2\mu)[\lambda-k_2(u)][\lambda-k_3(u)]-(\lambda+\mu)[\lambda-k_2(u)]^2[\lambda-k_3(u)]^2\right\}\ell^{k_1(u)b}c_1(u)+\\ +\left\{\mu u(\lambda+\mu)^2k_2^2(u)-\lambda\mu u(\lambda+2\mu)[\lambda-k_1(u)][\lambda-k_3(u)]-(\lambda+\mu)[\lambda-k_1(u)]^2[\lambda-k_3(u)]^2\right\}\ell^{k_2(u)b}c_2(u)+\\ +\left\{\mu u(\lambda+\mu)^2k_3^2(u)-\lambda\mu u(\lambda+2\mu)[\lambda-k_1(u)][\lambda-k_2(u)]-(\lambda+\mu)[\lambda-k_1(u)]^2[\lambda-k_2(u)]^2\right\}\ell^{k_3(u)b}c_3(u)=\\ \qquad =\lambda^2\mu^3u^2.\end{cases}$$

Прямые вычисления показывают, что определитель этой системы и все его миноры второго порядка равны нулю. Поэтому имеем:

$$c_1(u) = \frac{\lambda^2 u}{[\lambda - k_1(u)]^2} \ell^{-k_1(u) b}, \qquad c_2(u) = 0, \quad c_3(u) = 0.$$

Найденные $c_1(u), c_2(u), c_3(u)$ поставив в решение (5) получим:

$$\psi(u/z) = \frac{\lambda^2 u}{[\lambda - k_1(u)]^2} \ell^{(z-b) k_1(u)},$$

где $k_1(u)$ - корень характеристического уравнения (6), который в точке 1 равен нулю.

Следствие 1. В рассматриваемом классе распределений безусловная производящая функция $\psi(u)$ равна:

$$\psi(u) = \frac{\lambda^4 u}{[\lambda - k_1(u)]^4} \{1 + b[\lambda - k_1(u)]\} \ell^{-\lambda b}. \tag{7}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\psi(u) = \int_{z=b}^{\infty} \psi(u/z) d\mathrm{P}\{X(0,\omega) < z\} =$$

$$= \frac{\lambda^4 u e^{-bk_1(u)}}{[\lambda - k_1(u)]^4} \int_{z=b}^{\infty} z\, e^{-[\lambda - k_1(u)]z} dz = \frac{\lambda^2 u}{[\lambda - k_1(u)]^4} \{1 + b[\lambda - k_1(u)]\} \ell^{-\lambda b}.$$

Следствие 2. Пусть $\eta_1(\omega)$ имеет распределение Лапласа с параметрами λ и μ, причем $\lambda > 2\mu$. Тогда математическое ожидание и дисперсия числа шагов ν_1^b примет вид:

$$\mathrm{M}\nu_1^b = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda - 2\mu} \ell^{-\lambda b} + \frac{\lambda(\lambda + \mu)b}{\lambda - 2\mu} \ell^{-\lambda b},$$

$$D\nu_1^b = \frac{4\lambda\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda - 2\mu)^3} \ell^{-\lambda b} - \frac{\lambda^3 b(\lambda - \mu)}{(\lambda - 2\mu)^3} \ell^{-\lambda b} + \frac{2\lambda\mu^2 b(4\lambda - 3\mu)}{(\lambda - 2\mu)^3} \ell^{-\lambda b} -$$

$$- \frac{\lambda^2 b^2 (3\lambda\mu^2 + 2\mu^3 - \lambda^3)}{(\lambda - 2\mu)^3} \ell^{-\lambda b}.$$

Доказательство. По свойству производящий функции имеем:

$$\mathrm{M}\nu_1^b = \psi(1),$$

$$D\nu_1^b = \psi''(1) + \psi'(1)[1 - \psi'(1)].$$

Тогда из (7) получим:

$$\psi'(1) = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda - 2\mu} \ell^{-\lambda b} + \frac{\lambda(\lambda + \mu)b}{\lambda - 2\mu} \ell^{-\lambda b},$$

$$\psi''(1)=\frac{2\mu(3\lambda b+4)}{(\lambda-2\mu)}\ell^{-\lambda b}+\frac{4\mu^{2}(3\lambda b+5)}{(\lambda-2\mu)^{2}}\ell^{-\lambda b}+$$

$$+\frac{16\lambda\mu^{2}-8\mu^{3}+12\lambda^{2}\mu^{2}b-6\lambda\mu^{3}b}{(\lambda-2\mu)^{3}}\ell^{-\lambda b}.$$

Таким образом, имеем:

$$M\nu_1^b=\frac{\lambda+2\mu}{\lambda-2\mu}\ell^{-\lambda b}+\frac{\lambda(\lambda+\mu)b}{\lambda-2\mu}\ell^{-\lambda b},$$

$$D\nu_1^b=\frac{4\lambda\mu(\lambda+\mu)}{(\lambda-2\mu)^{3}}\ell^{-\lambda b}-\frac{\lambda^{3}b(\lambda-\mu)}{(\lambda-2\mu)^{3}}\ell^{-\lambda b}+\frac{2\lambda\mu^{2}b(4\lambda-3\mu)}{(\lambda-2\mu)^{3}}\ell^{-\lambda b}-$$

$$-\frac{\lambda^{2}b^{2}(3\lambda\mu^{2}+2\mu^{3}-\lambda^{3})}{(\lambda-2\mu)^{3}}\ell^{-\lambda b}.$$

При $b=0$ находим следующие формулы:

$$M\nu_1^0=\frac{\lambda+2\mu}{\lambda-2\mu},\quad D\nu_1^0=\frac{4\lambda\mu(\lambda+\mu)}{(\lambda-2\mu)^{3}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Lotov V.I. On the asymptotic of distributions in two-sided boundary problems for random walks defined on a Markov chain. Sib. Adv. Math. 1991, v.1, №2, p.26-51.
2. Насирова Т.И. Процессы полумарковского блуждания. Баку: Элм, 1984.
3. Насирова Т.И. Сложные процессы полумарковского блуждания при наличии экрана. Баку: Элм, 1988.
4. Рогозин Б.А., Могульский А.А. Случайные блуждания в положительном квадрате. III. Константы в интегральной и локальной теоремах //Математические труды /ИМ СО РАН., 2001, т. 4, № 1, с. 68-93.

YARIMMARKOV DOLAŞMA PROSESİNİN GECİKDİRƏN EKRANA ÇATMASI ÜÇÜN ATILAN ADDIMLAR SAYININ DOĞURAN FUNKSİYASI HAQQINDA

B.Q.ŞAMİLOVA

XÜLASƏ

Bu işdə mürəkkəb Laplas paylanması üçün pilləvarı yarımmarкov dolaşma prosesi tədqiq olunur. Əvvəlcə atılan addımlar sayı paylanmasının şərti və şərtsiz doğuran funksiyası üçün inteqral tənlik qurulur. Sonra isə bu inteqral tənlikdən mürəkkəb Laplas paylanması halında prosesin birinci dəfə gecikdirən ekrana çatması üçün atılan addımlar sayının doğuran funksiyası tapılır. Daha sonra xüsusi halda gecikdirən ekrana çatması üçün atılan addımlar sayının riyazi gözləmə və dispersiyası tapılır.

ABOUT THE GENERATING FUNCTION OF THE PROCESS SEMIMARKOV RANDOM WALK FOR REACHING THE SCREEN

B.Q.SHAMILOVA

SUMMARY

In this article is investigated the step process of semimarkov random walks, with detaining screen and it was obtained the generating function of the distribution of the steps in which the process first detaining screen. The integrated equation is received for conditional generating function of number of steps at which process reaches for the first time the screen. Except for that it is founded obvious formulas for an expectation and variance of number of steps.